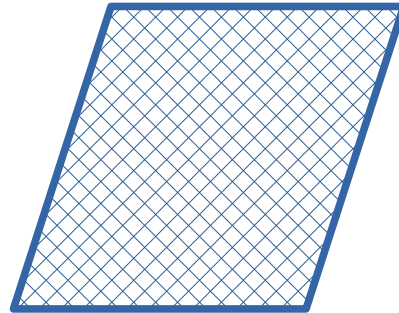
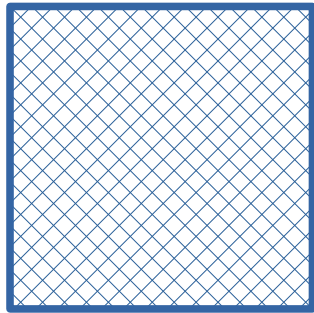


ТЕОРИЯ БОЛЬШИХ (КОНЕЧНЫХ) ДЕФОРМАЦИЙ

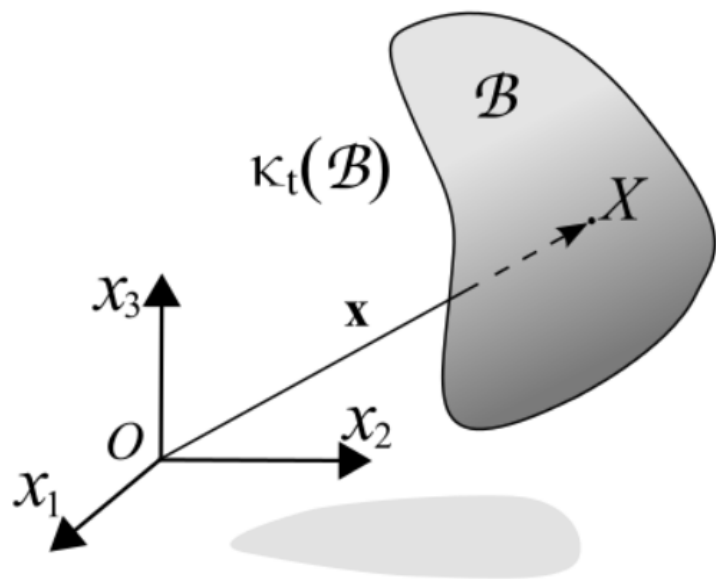
ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ



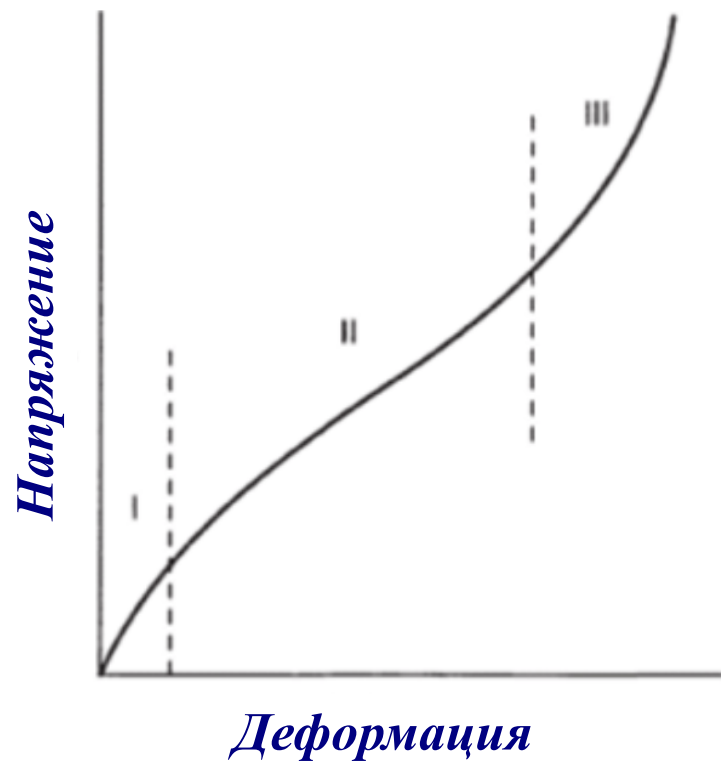
***Столбов О.В.
Столбова О.С.***

Механика сплошных сред

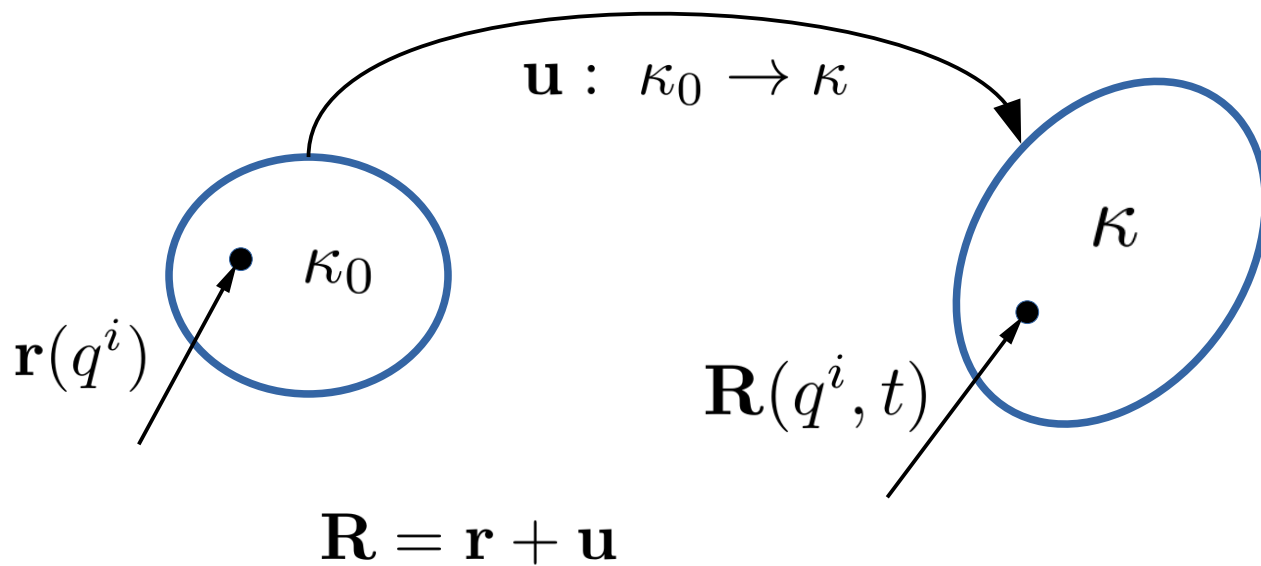


представительный объём -
минимально возможный объём тела,
который позволяет исследовать его
некоторые заданные свойства

Большие упругие деформации



Начальная и текущая конфигурации



Взаимные базисы:

$$\mathbf{r}^i = \frac{\mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_k}{\sqrt{g}},$$

$$\mathbf{R}^i = \frac{\mathbf{R}_j \times \mathbf{R}_k}{\sqrt{G}}$$

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \quad g = \det g_{ij}$$

$$G_{ij} = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j, \quad G = \det G_{ij}$$

Основные локальные базисы:

$$\mathbf{r}_i = \partial \mathbf{r} / \partial q^i, \quad \mathbf{R}_i = \partial \mathbf{R} / \partial q^i$$

Операторы Гамильтона:

$$\nabla = \mathbf{r}^i \partial / \partial q^i, \quad \tilde{\nabla} = \mathbf{R}^i \partial / \partial q^i$$

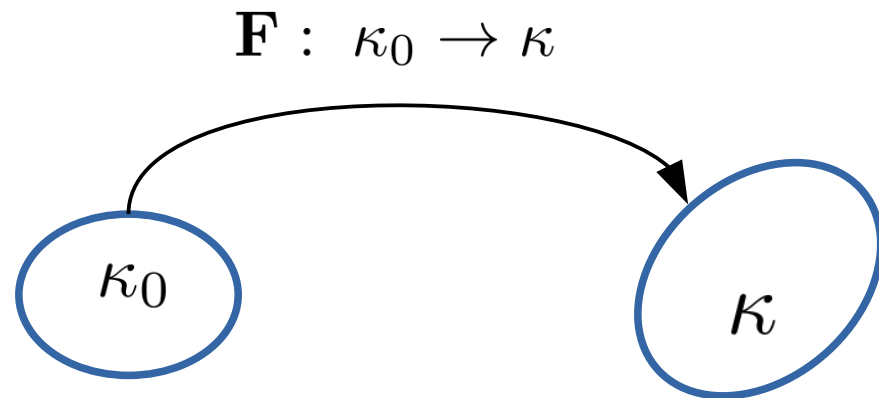
Градиент места

$$\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{R})^T$$

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{r}^i \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \right)^T = (\mathbf{r}^i \mathbf{R}_i)^T = \mathbf{R}_i \mathbf{r}^i$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$$

$$\mathbf{F} = (\nabla (\mathbf{r} + \mathbf{u}))^T = (\nabla \mathbf{r})^T + (\nabla \mathbf{u})^T = \mathbf{I} + \mathbf{h}$$



Обратный градиент места

$$\mathbf{F}^{-1} = (\tilde{\nabla} \mathbf{r})^T$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{h}}, \quad \tilde{\mathbf{h}} = (\tilde{\nabla} \mathbf{u})^T$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{r}_i \mathbf{R}^i$$

$$\tilde{\nabla} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla$$

Меры деформаций и тензоры деформаций

Мера деформаций Коши-Грина:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T$$

Мера деформаций Альманзи:

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{I} - \tilde{\nabla} \mathbf{u} - (\tilde{\nabla} \mathbf{u})^T + \tilde{\nabla} \mathbf{u} \cdot (\tilde{\nabla} \mathbf{u})^T$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \Phi \quad (\text{мера Фингера})$$

Тензоры деформаций :

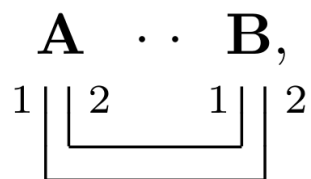
$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \boxed{\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)} + \nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \boxed{\frac{1}{2} (\tilde{\nabla} \mathbf{u} + (\tilde{\nabla} \mathbf{u})^T)} - \tilde{\nabla} \mathbf{u} \cdot (\tilde{\nabla} \mathbf{u})^T$$

Инварианты мер деформаций

Главные инварианты тензора 2-го ранга:

$$I_1(\mathbf{B}) = \mathbf{I} \cdot \cdot \mathbf{B}, \quad I_2(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} (I_1^2(\mathbf{B}) - I_1(\mathbf{B}^2)), \quad I_3(\mathbf{B}) = \det \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B},$$


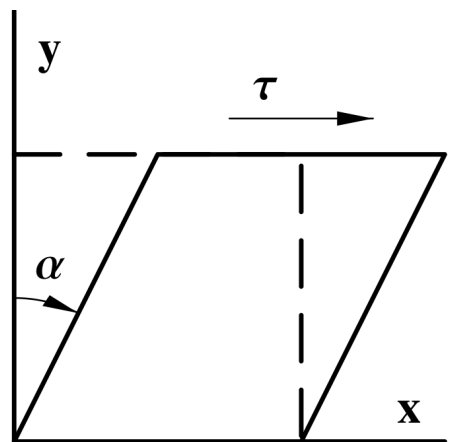
$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{C}) &= \mathbf{I} \cdot \cdot \mathbf{C} = \mathbf{I} \cdot \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) = (\mathbf{I} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot \cdot \mathbf{F} = \\ &= \mathbf{F} \cdot \cdot \mathbf{F}^T = (\mathbf{I} \cdot \mathbf{F}) \cdot \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{I} \cdot \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) = \mathbf{I} \cdot \cdot \Phi = I_1(\Phi) \end{aligned}$$

$$I_2(\mathbf{C}) = I_2(\Phi) \quad I_3(\mathbf{C}) = I_3(\Phi)$$

Якобиан:

$$J = \frac{dV}{dV_0} = \sqrt{\frac{G}{g}} = \sqrt{I_3(\mathbf{C})} = I_3(\mathbf{F}) = \frac{\rho_0}{\rho}$$

Простой сдвиг



$$st = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{R})^T = \mathbf{I} + st \mathbf{i} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{I} + st(\mathbf{i} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{i}) + (st)^2 \mathbf{j} \mathbf{j}$$

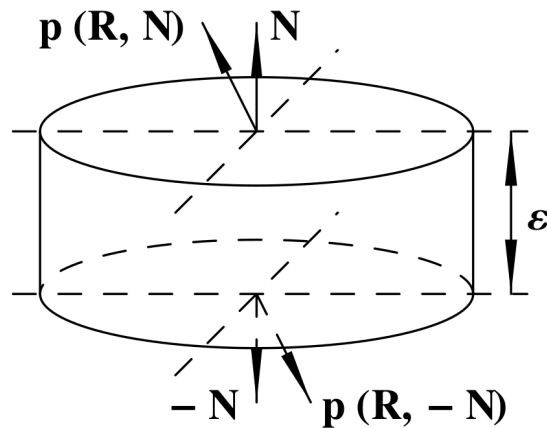
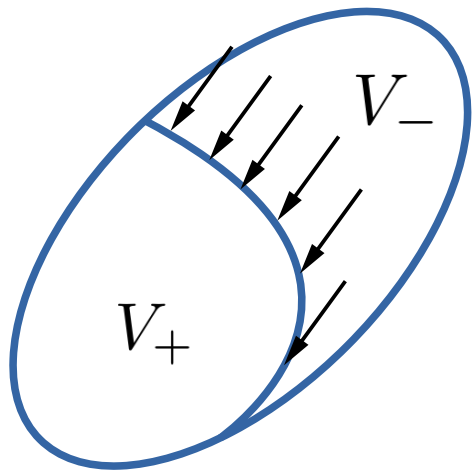
$$\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2 = \\ [(st)/2] (\mathbf{i} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{i}) + [(st)^2/2] \mathbf{j} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{R} = (x + st y) \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

$$\nabla = (\partial/\partial x) \mathbf{i} + (\partial/\partial y) \mathbf{j} + (\partial/\partial z) \mathbf{k}$$

Постулат Коши и тензор истинных напряжений



$$\mathbf{p}(\mathbf{R}, \mathbf{N}) = -\mathbf{p}(\mathbf{R}, -\mathbf{N})$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{N}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$$

Уравнение движения:

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{v}}$$

Тензоры напряжений Пиола-Кирхгофа

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} dS = \mathbf{p}_0 ds$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} dS = \mathbf{N} dS \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{N} dS \cdot \mathbf{T} = \mathbf{n} ds \cdot (J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_I ds = \mathbf{p}_0 ds$$

$$\mathbf{P}_I = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \quad \text{первого рода (несимметричный)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P}_I + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \dot{\mathbf{v}}, \quad \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{P}_{II} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad \text{второго рода (симметричный)}$$

Упругий потенциал

$W_C(\mathbf{C})$, $W_E(\mathbf{E})$ - скалярная функция тензорного аргумента

$$\mathbf{P}_{II} = 2 \frac{\partial W_C(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{или} \quad \mathbf{P}_{II} = \frac{\partial W_E(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}$$

Для начально изотропного материала:

$$W_C(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}))$$

Общая форма определяющего уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{II} &= 2 \frac{\partial W_C(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial W_C(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}))}{\partial \mathbf{C}} \\ &= 2 \left(\frac{\partial W_C}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W_C}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W_C}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \right) = \\ &= 2 \left[\frac{\partial W_C}{\partial I_1} \mathbf{I} + \frac{\partial W_C}{\partial I_2} (I_1(\mathbf{C}) \mathbf{I} - \mathbf{C}) + \frac{\partial W_C}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Дифференцирование скалярных функций тензорного аргумента:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{a} &= \delta(a^i) \mathbf{r}_i + a^i \delta \mathbf{r}_i = \\ &= \delta(a_i) \mathbf{r}^i + a_i \delta \mathbf{r}^i \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial \Phi(a^{11}, a^{12}, \dots, a^{33})}{\partial a^{ij}} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j$$

$$\delta \Phi(\mathbf{A}) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \cdot \delta \mathbf{A}^T$$

Упругий потенциал (примеры)

Потенциал нео-Гука:

$$W = C_1 (I_1 - 3)$$

Потенциал Муни-Ривлина:

$$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3)$$

несжимаемый материал

$$W = C_1 (I_1 - 3 - 2 \ln J) + D_1 (J - 1)^2$$

$$W = C_1 (\bar{I}_1 - 3) + C_2 (\bar{I}_2 - 3),$$

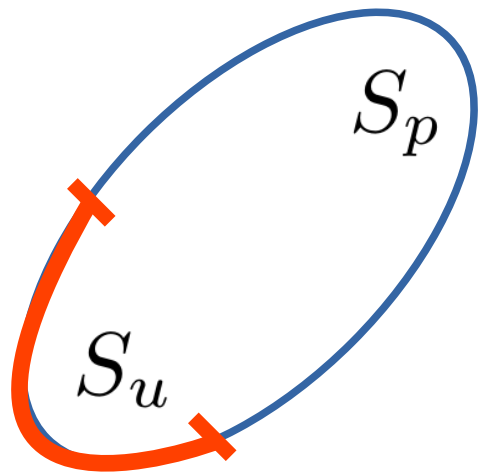
$$\bar{I}_1 = J^{-2/3} I_1$$

$$\bar{I}_2 = J^{-4/3} I_2$$

Потенциал Пенга-Ландела:

$$W = \frac{1}{2} G \left(J^{-2/3} I_1(\mathbf{C}) - 3 \right) + \frac{1}{2} K (J - 1)^2$$

Постановка краевой задачи



$$S_u \cup S_p = S$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{P}_{II} = 2 \frac{\partial W_C(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{T} = 2J^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^T$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad \text{или} \quad \mathbf{C} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T,$$

$$\mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{u}^*,$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}|_{S_p} = \mathbf{p}^*.$$

Вариационная постановка задачи

$$\int_V (\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} dV \pm \int_{S_p} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{p}^*) \cdot \delta \mathbf{u} dS_p = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{S_p} \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} dS_p &= \int_{S_p \cup S_u} \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} dS = \\ &= \int_S \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} dS = \int_V \tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u}) dV = \\ &= \int_V (\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T}) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_V (\mathbf{T} \cdot \cdot \tilde{\nabla} \delta \mathbf{u}) dV. \end{aligned}$$

$\delta \mathbf{u}$ - пробные функции

Вариационное уравнение Лагранжа:

$$\int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{S_p} \mathbf{p}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS_p - \int_V (\mathbf{T} \cdot \cdot \tilde{\nabla} \delta \mathbf{u}) dV = 0$$

Вариационная постановка в начальной конфигурации

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u} \quad \longrightarrow \quad \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{R}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \cdot \tilde{\nabla} \delta \mathbf{u} &= \mathbf{T} \cdot \cdot \tilde{\nabla} \delta \mathbf{R} = \mathbf{T} \cdot \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla \delta \mathbf{R}) = \\ &= \mathbf{T} \cdot \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \delta \nabla \mathbf{R}) = \mathbf{T} \cdot \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \delta \mathbf{F}^T) = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \cdot \cdot \delta \mathbf{F}^T \\ &= (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}) \cdot \cdot \delta \mathbf{F} = (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \cdot \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}) = \\ &= J^{-1} \mathbf{P}_{II} \cdot \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F} + \delta \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) = \frac{1}{2} J^{-1} \mathbf{P}_{II} \cdot \cdot \delta \mathbf{C}. \end{aligned}$$

$$dV = J dV_0 \quad dS = J_s ds, \text{ где } J_s = J \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{n}} \quad \mathbf{p}_{s_p}^* = J_s \mathbf{p}^*$$

$$\int_{V_0} \rho_0 \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 + \int_{s_p} \mathbf{p}_{s_p}^* \cdot \delta \mathbf{u} ds_p - \frac{1}{2} \int_{V_0} \underbrace{\mathbf{P}_{II} \cdot \cdot \delta \mathbf{C}}_{\delta W_C(\mathbf{C}) = \frac{\partial W_C(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \cdot \cdot \delta \mathbf{C}} dV_0 = 0.$$

Вариационная постановка краевой задачи

$$\int_{V_0} \rho_0 \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 + \int_{s_p} \mathbf{p}_{s_p}^* \cdot \delta \mathbf{u} ds_p - \frac{1}{2} \int_{V_0} \mathbf{P}_{II} \cdot \delta \mathbf{C} dV_0 = 0.$$

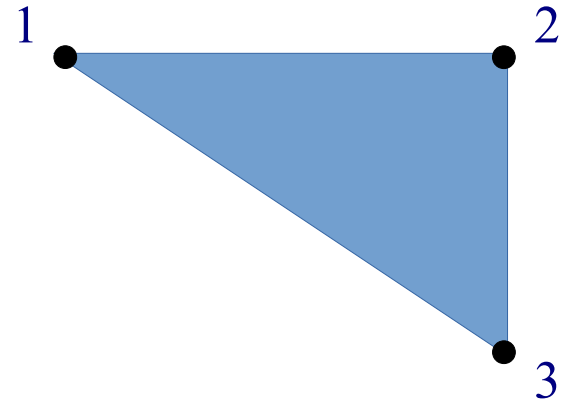
$$\mathbf{P}_{II} = 2 \frac{\partial W_C(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad \delta W_C(\mathbf{C}) = \frac{\partial W_C(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \cdot \delta \mathbf{C}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T$$

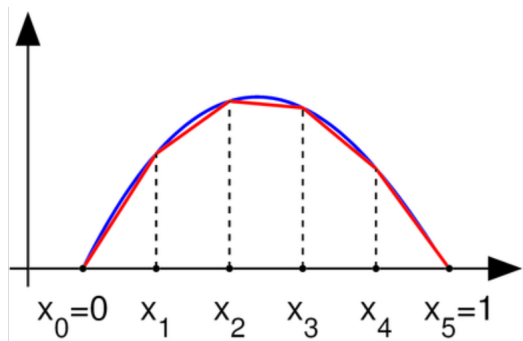
$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \in M_k^{V_0}}}^m \psi_{(j)}^k \right)$$

$\mathbf{u}_k$ - значения в узле k

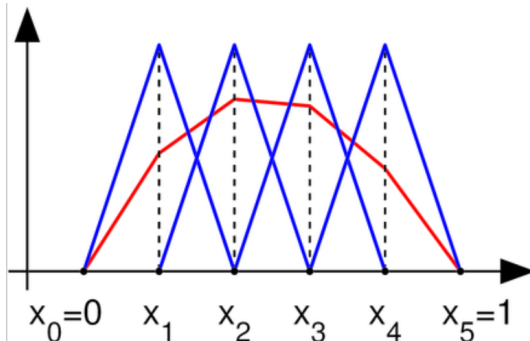
$\psi_{(j)}^k$ - *функции формы* в узле k
j-го элемента



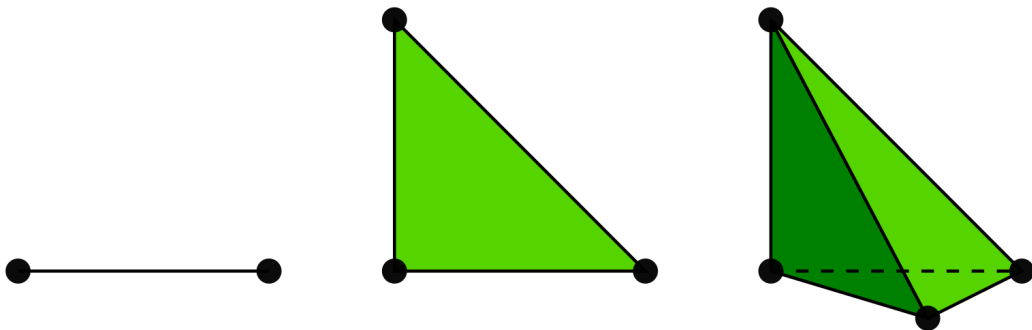
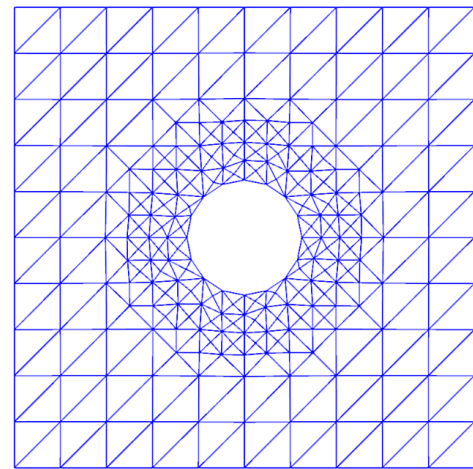
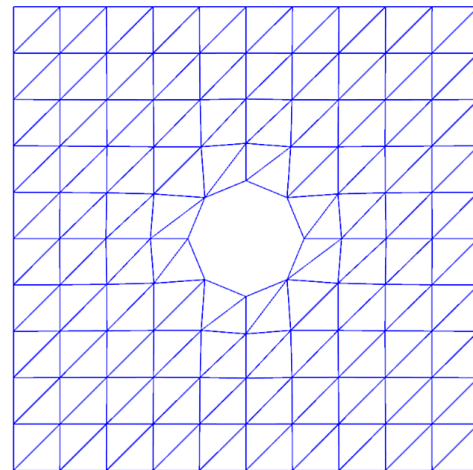
Конечно-элементное пространство



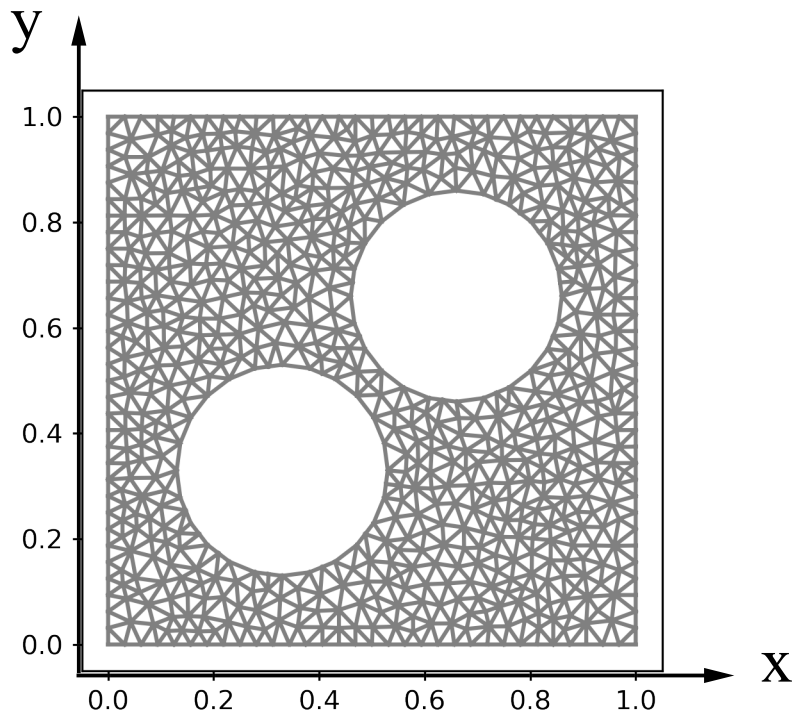
Функция на H_0^1 , с нулевыми значениями на концах (голубая), и аппроксимация этой функции отрезками (красная).



Базисные функции v_k (голубые) и линейная комбинация из них, которая аппроксимирует искомую функцию (красная).



Задача: деформация под действием силы тяжести



Граничные условия:

$$u_x(x, y=0)=0$$

$$u_y(x, y=0)=0$$

$$\Pi = \int W dV_0 - \int \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} dV_0 \rightarrow \min$$

$$\mathbf{g} = -g \mathbf{j}; \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} = g \mathbf{u} \cdot \mathbf{j} = g u_y$$

$$\tilde{W} = \frac{W}{G} = \frac{1}{2} (I_1(\mathbf{C}) - 2) + \frac{K}{G} (J - 1)^2 \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/h$$

$$\tilde{\Pi} = \int (\tilde{W} + \alpha \tilde{u}_y) dV_0 \quad \alpha = \frac{\rho_0 g h}{G}$$